ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ И ГИПОТЕЗЫ ЗАМЫКАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРЫХ МОМЕНТОВ

При выборе конкретной модели расчета турбулентных течений, видимо целесообразно привлекать уравнения из тех характеристик потока, которые подвергаются систематическим измерениям, как в натурных условиях, так и лабораторных опытах. Далее, хотя в настоящее время вычислительная техника позволяет найти численное решение систем содержащих большое количество уравнений, увеличение их числа не адекватно более детальному изучению структуры течения. Это связано с тем, что с увеличением числа уравнений растет и число полуэмпирических гипотез и эмпирических констант. И в тех ситуациях, когда в моделях используются уравнения для субстанций, не измеряемых экспериментально, введение новых эмпирических констант означает по существу использование подгоночных функций, что обеспечивает саму модель. Таким образом, сложность моделей расчета турбулентных течений должна, в первую очередь определяться уровнем экспериментальных данных.

Как известно, в реальных условиях систематическим измерениям подвергаются поля осредненных значений скорости и температуры, менее детально изучается пульсационная структура течений. Измерения последних производятся в лабораторных условиях, и в настоящее время имеется достаточно опытных данных, например, по распределению различных одноточечных моментов второго порядка скорости и скалярных полей (температура и концентрация). Исходя из этих соображений, выбранная нами модель основана на детальном расчете скорости и скалярных полей на основе соответствующих дифференциальных уравнений для расчета тензоров турбулентных напряжений и пульсационных характеристик скалярных полей. В принципе, для исследования турбулентных сдвиговых течении при наличии внешних сил необходимо использовать различные методы расчета турбулентных течений. Очевидно, что аналитическая теория турбулентности для рассматриваемой задачи не применима, поскольку она развита в основном для однородной турбулентности. Как уже говорилось, прямое численное интегрирование нестационарных уравнений Навье-Стокса на ЭВМ в настоящее время встречает пока непреодолимые трудности. Поэтому, основные успехи в расчете турбулентных течений связаны с построением моделей течений описывающих поведение осредненных параметров потока (скорости, скалярных полей и пульсационных характеристик). Эти модели различаются детальностью представления поля течения, точностью описания различных классов течений и сложностью расчета. Первой и успешно применимой в настоящее время является модель Прандля-Кармана, основу которой составляют уравнения пограничного слоя и теория пути смещения Прандтля. Эта модель и ее модификации позволяют рассчитать поля осредненных скоростей и распределение напряжений Рейнольдса различных типов турбулентных течений, путем подбора ряда эмпирических констант. Указанное направление, названное полуэмпирическим методом, получило развитие в последние десятилетия благодаря основополагающим идеям Колмогорова-Прандтля-Ротта /23,24,67/. Известно много работ, развивающих эти идеи применительно к расчету конкретных задач /68,69,72,73,74/. Как правило, в число определяющих уравнений, наряду с уравнениями движения, включаются уравнения для различных пульсационных характеристик (кинетическая энергия, вихревая вязкость, напряжения Рейнольдса и т.д.), которые замыкаются применением полуэмпирических гипотез для появившихся в уравнениях новых неизвестных величин (тензорные величины третьего порядка, корреляции пульсаций давления и скорости и др.). Все полуэмпирические гипотезы, в конечном счете сводятся к выражению входящих в уравнения переноса сложных корреляций через более простые, которые входят в число искомых величин или относительно которых легче выдвинуть дополнительные соображения, замыкающие постановку задачи. Одним из основных выводов Ротты состоит в том, что поперечные компоненты u_2 и u_3 возрастают за счет осевой компоненты u_1 благодаря переносу энергии через посредство корреляции приводит к выравниванию всех трех компонент скорости, т.е. к тому, что турбулентность становится изотропной. Логично предположить, что перенос энергии от компоненты с большей интенсивностью к компоненте с меньшей интенсивностью через посредство корреляции давление-градиент скорости пропорционален разности интенсивностей, и произведя количественную оценку корреляции и используя соображения размерности, Ротта получил следующее выражение

$$\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=k\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right) \qquad (1)$$

Соотношение (1.22) Ротта оказало существенное влияние на развитие полуэмпирической теории для расчета структуры турбулентных течений, поскольку теперь отыскание касательных напряжений Рейнольдса рассматривается как часть общей задачи расчета моментов второго порядка. В дальнейшем гипотеза Ротта подвергалась различным модификациям, вызванным стремлением улучшить совпадение расчетов с экспериментом.

Результаты, полученные выше, показывают, что турбулентное напряжение сдвига может возникнуть только в том случае, когда осредненный поток является неравномерным. При этом корреляция давление-градиент “скорости” имеет тенденцию ослабить неизотропность путем выравнивания всех трех компонент турбулентных пульсаций скорости и уменьшения напряжения трения. Тенденция к изотропности сильнее всего проявляется в зоне мелкомасштабной турбулентности. В связи с тем, что влияние вязкости через диссипацию с увеличением интенсивности турбулентности возрастает, но при неизотропной турбулентности оно должно приводить к более быстрому затуханию компонент с высокой интенсивностью, иначе говоря, этот фактор также имеет тенденцию к выравниванию компонент. В этом случае рассмотренный эффект в диапазоне больших волновых чисел (или малых элементах жидкости) тоже проявляется сильнее.

В уравнений (5, ЛЕК-3) имеется диссипативный член, который характеризует влияние вязкой диссипации на структуру напряжений Рейнольдса. Для качественного анализа этого процесса выделим в этом выражении две его составляющие величины

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \qquad \text{и} \qquad \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2}$$

поскольку в предельном случае изотропной турбулентности значение этих слагаемых различаются.

Для получения выражения этих членов рассмотрим два предельных случая: бесконечно больших и бесконечно малых значений чисел Рейнольдса, вычисленных по среднекинетической энергии. При очень больших числах Рейнольдса турбулентное движение состоит из элементов, размеры которых различаются на много порядков. Кинетическая энергия в основном содержится в больших турбулентных элементах, в то время как основной вклад в $\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2}$ вносит мелкие элементы. По А.Н.Колмогорову турбулентность обладает свойством локальной изотропности, т.е. пульсации вектора скорости в произвольной точке изотропны, если рассматриваемые точки расположены внутри достаточно малой области. Даже, если действуют внешние воздействия, то они действуют в основном на большие турбулентные элементы, так что малые элементы можно считать изотропными. Поэтому, в выражение $\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2}$ вносится одинаковый вклад при различных индексах (i=1,2,3). Согласно гипотезе А.Н. Колмогорова, диссипации на единицу массы жидкости и другие определяющие величины зависят только от осредненной пульсационной энергии E и величины l

пропорциональной “некоторому среднему масштабу вихрей в данной точке”. Поэтому для больших чисел Рейнольдса можно записать:

$$\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2}=\frac{c}{3}\frac{E^{3/2}}{l}$$

Из-за локальной изотропности у малых элементов не может существовать корреляции между $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$ и $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}$. Поэтому полагается, что

$$\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}=0$$

При малых числах Рейнольдса турбулентность состоит из элементов, весьма мало отличающихся друг от друга. Элементы, определяющие поведение $\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2$ заключают в себе значительную долю энергии. Поэтому энергия рассеянная компонентой u_i пропорциональна содержащейся в ней кинетической энергии. Следовательно,

$$\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2}=\nu\frac{c_1}{2}\frac{\overline{u}_i^2}{l^2}$$

По этой же причине $\overline{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}}$ пропорционально $\overline{u_i u_j}$,

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}=\frac{c_1}{2}\frac{\overline{u_i u_j}}{l^2}$$

В окончательном виде интерполяционную формулу для диссипативного члена записывают в виде следующего соотношения

$$\overline{2\quad\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}=\nu c_1\frac{\overline{u_i u_j}}{l^2}+\frac{2}{3}c\delta_{ij}\frac{E^{3/2}}{l}\qquad(2)$$

В дальнейшем наряду с гидродинамикой различных течений будут рассматриваться вопросы тепломассообмена в потоках, а также температурнонеоднородные среды. Поэтому в этом разделе будут рассмотрены гипотезы для уравнения переноса тепла в турбулентных потоках. Что касается турбулентного переноса вещества, то полуэмпирическая теория этих процессов совпадает с аналогичной теорией процессов распространения тепла.

Рассмотрим уравнения для вторых моментов поля температуры и скорости. В них, как и в динамических уравнениях, необходимо привлечение дополнительных гипотез, позволяющих выразить новые неизвестные величины через первые и вторые моменты. Это выполняется по аналогии с гипотезами Ротта-Колмогорова.

Простейшим предположением о связи корреляции “пульсации давление-градиент пульсации температуры” со вторыми моментами $\overline{u_i t}$ является допущение об их пропорциональности

$$\overline{\frac{P}{\rho}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = -k_t \frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i t} \qquad (3)$$

Для выражения диссипативных членов, как и ранее, рассмотрим предельные случаи больших и малых значений турбулентного числа Рейнольдса.

В первом случае, принимая приближенно справедливую гипотезу А.Н.Колмогорова, о локальной изотропии и используя условие равенства нулю в изотропной турбулентности корреляционного тензора первого ранга $\overline{u_i t}$, получим:

$$2a\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = 0, \quad 2\nu\overline{\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = c_t \frac{\sqrt{E}}{l}\bar{t}^2$$

В области малых чисел Re диссипацию предполагают пропорциональной диссипируемой величине

$$2a\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = c_{tu}\frac{\overline{u_i t}}{l^2}, \quad 2a\overline{\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = c_t a\frac{\overline{t^2}}{l^2}$$

Суперпозиция диссипативных эффектов при больших и малых значениях турбулентного числа Рейнольдса приводит к следующим простейшим выражениям

$$2a\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = c_{tu}\frac{\overline{u_i t}}{l^2} \qquad (4)$$

$$2a\overline{\frac{\partial t}{\partial x_k}\frac{\partial t}{\partial x_k}} = c_{1t}\nu\frac{\overline{t^2}}{l^2} + c_t\frac{\sqrt{E}}{l}\bar{t}^2 \qquad (5)$$

Гипотезы (1.22) - (1.26) позволяют замкнуть систему уравнений для определения полей скорости, температуры и их одноточечных моментов второго порядка. Как известно, характерной особенностью широко распространенных основных типов турбулентных течений является резкое изменение различных поперечных градиентов характеристик среднего движения по сравнению с продольным градиентом этих же величин. Это позволяет принять в качестве моделей указанных движений жидкости чисто сдвиговое течение. При этом в уравнениях для $u_i u_j$ выпадают конвективные члены, замечено, что после достаточно продолжительного времени вырождения энергии турбулентности убывает, как время в степени – 5/2. Это обстоятельство объясняется как одно из следствий пренебрежимо малости нелинейных инерционных членов / 76 /. Диффузионный член описывает перераспределение энергии за счет вязкой и турбулентной диффузии и диффузии энергии пульсаций давления. Для его описания часто употребляется градиентная модель, однако она не является тензорно инвариантной. Тем не менее, даже простейшая тензорно инвариантная форма модели оказывается существенно сложнее, а при вычислениях по такой модели результаты не улучаются. По этим причинам при рассмотрении сдвиговых течений для приближенного расчета пульсационных характеристик диффузионным членом можно пренебречь. Пренебрежем также и вязкой диффузией. Это связано с тем, что вязкая диффузия пульсации, как показывают опыты, проявляется лишь в весьма тонком слое у стенки (в ламинарном подслое и примыкающей к нему части переходной области). В большинстве практически важных случаях включая теплообмен и диффузию при числах Прандтля и Шмидта (не превышающих примерно 10), вязкая диффузия незначительна. При принятых допущениях пренебрежение конвективными и диффузионными членами система дифференциальных уравнений для одноточечных моментов переходит в алгебраическую и приобретает локальный характер.

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\overline{u_i u_j}+\overline{u_j u_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+$$

$$+k\frac{\sqrt{E}}{l}\left(\overline{u_i u_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}E\right)+c_1\nu\frac{\overline{u_i u_j}}{l^2}+\frac{2}{3}c\delta_{ij}\frac{E^{3/2}}{l}=0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\overline{u_i t}}{\partial\tau}+\overline{u_i u_k}\frac{\partial T}{\partial x_k}+\overline{u_k t}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_k}+k_t\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i t}+c_{tu}\frac{\overline{u_i t}}{l^2}=0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\overline{t^2}+\overline{u_k t}\frac{\partial T}{\partial x_k}+c_{1t}\nu\frac{\overline{t^2}}{l^2}+c_t\frac{\overline{t^2}}{l}\sqrt{E}=0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial\overline{u_i q}}{\partial\tau}+\overline{u_i u_k}\frac{\partial Q}{\partial x_k}+\overline{u_k q}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_k}+k_q\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{u_i q}+c_{qu}\frac{\overline{u_i q}}{l^2}=0 \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\overline{q^2}+\overline{u_k q}\frac{\partial Q}{\partial x_k}+c_{1q}\nu\frac{\overline{q^2}}{l^2}+c_q\frac{\overline{q^2}}{l}\sqrt{E}=0 \qquad (10)$$

Приведенные уравнения будут далее использоваться многократно в последующих ЛЕКЦИЯХ.